МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ

«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

**Массалітіна Є.В., Гончаренко В.О.**

# ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

**Методичні вказівки до вивчення**

**теми дисципліни «Вища математика»**

НТУУ «КПІ»

Київ 2006

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

# ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

## Методичні вказівки до вивчення теми дисципліни «Вища математика» для студентів енергетичних спеціальностей усіх форм навчання

***Затверджено Методичною радою НТУУ «КПІ»***

НТУУ «КПІ»
Київ 2006

Операційне числення. Метод. вказівки до вивчення теми дисципліни «Вища математика» для студ. енергет. спец. усіх форм навчання / Уклад.: Є. В. Массалітіна, В. О. Гончаренко – К.: НТУУ «КПІ», 2006. – 56 с.

*Гриф надано Методичною радою НТУУ „КПІ”*

*(Протокол №1 від 28.09.2006 р.)*

# ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

## Методичні вказівки до вивчення теми дисципліни «Вища математика» для студентів енергетичних спеціальностей усіх форм навчання

Укладачі: *Массалітіна Євгенія Вікторівна, канд. фіз.-мат. наук,*

*Гончаренко Віра Олександрівна*

Відповідальний редактор: *Дудкін М.Є., доктор фіз.-мат. наук, доц.*

Рецензент: *Диховичний О.О., канд. фіз.-мат. наук, доц.*

*За редакцією укладачів*

*Надруковано з оригінал-макета замовника*

# ВСТУП

Методичні вказівки призначені для студентів другого курсу енергетичних спеціальностей стаціонарної та заочної форм навчання вищих навчальних закладів, які вивчають операційне числення в курсі вищої математики. Операційне числення застосовується при вивченні різноманітних технічних дисциплін: теоретичних основ електроніки та радіотехніки, теорії автоматичного керування.

Операційне числення – це зручний математичний апарат для розв’язування лінійних диференціальних рівнянь та систем лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

В даній роботі наведені основні теоретичні положення цієї теорії, а також приклади її застосування для розв’язування лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, систем таких рівнянь, інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь.

# ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

## ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ТА МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

### 1. ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА

**Оригіналом** будемо називати будь-яку комплексно-значну функцію $f(t)$ дійсної змінної $t$, яка задовольняє таким умовам:

1. $f(t) \equiv 0$, при $t < 0$;
2. $f(t)$ кусково-неперервна при $t \geq 0$ (на будь-якому скінченому проміжку $f(t)$ або неперервна, або має кінчене число точок розриву першого роду);
3. існують такі сталі $M > 0$ та $s_0 \geq 0$, що $|f(t)| \leq M\,\mathrm{e}^{s_0 t}$ для всіх $t \in R$.

Найменше з чисел $s_0$ – називають **показником зростання функції** $f(t)$.

Найпростішою функцією-оригіналом є **одинична функція Хевісайда** (рис. 1)

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \tag{1}$$

Якщо функція $\varphi(t)$ задовольняє умовам 2) – 3) оригінала, але не задовольняє умові 1), то розглядають функцію

$$f(t) = \varphi(t) \cdot \eta(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

яка вже задовольняє умовам оригінала. Для скорочення запису замість $\varphi(t) \cdot \eta(t)$ пишуть $\varphi(t)$, вважаючи, що всі функції, які задовольняють умовам 2) та 3) оригінала, дорівнюють нулю при $t < 0$.

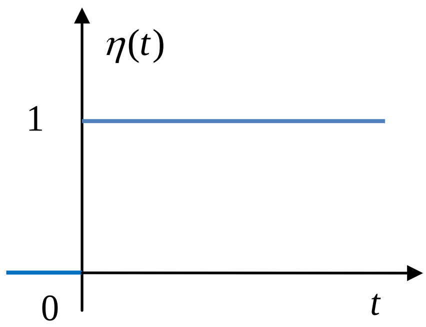



Рис. 1

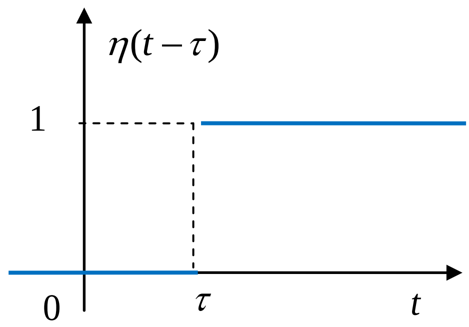



Рис. 2

**Узагальненою одиничною функцією Хевісайда** (рис. 2) називається функція

$$\eta(t-\tau)=\begin{cases}1, & t\ge\tau,\\ 0, & t<\tau,\end{cases}\quad \text{при } \tau>0 \tag{2}$$

За допомогою функцій (1) та (2) зручно записувати оригінали, які задаються різними аналітичними виразами на проміжках числової осі. Наприклад, якщо

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ f_1(t), & 0\le t<a,\\ f_2(t), & a\le t<b,\\ f_3(t), & t\ge b,\end{cases}$$

то

$$f(t)=f_1(t)[\eta(t)-\eta(t-a)]+f_2(t)[\eta(t-a)-\eta(t-b)]+f_3(t)\eta(t-b).$$

**Зображенням по Лапласу** оригінала $f(t)$ називають функцію $F(p)$ комплексної змінної $p=s+i\sigma$, яка визначається співвідношенням

$$F(p)=\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}dt.$$

Перехід від оригіналу до зображення зветься **перетворенням Лапласа** та позначається $f(t) \leftrightarrow F(p)$, або $F(p) = L\{f(t), p\}$ .

Функція $F(p)$ визначена та аналітична у півплощині $\mathrm{Re}\, p > s_0$, де $s_0$ – показник зростання функції $f(t)$.

## 1.1. Методика розв'язування завдання №1

**Приклад 1.** Перевірити, що функція $f(t) = \mathrm{e}^{3t} \cdot \cos 2t \cdot \eta(t)$ є функцією-оригіналом.

**Розв'язання.** Умова 1) виконана в силу завдання функції:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \mathrm{e}^{3t} \cdot \cos 2t, & t \geq 0. \end{cases}$$

Функція $f(t)$ неперервна при $t \geq 0$. Для всіх $t \in R$, $\left|\mathrm{e}^{3t} \cos 2t\right| \leq \mathrm{e}^{3t}$, так що в умові 3) за $M$ можна взяти будь-яке число, яке більше одиниці, $s_0 = 3$. Оскільки для функції $f(t)$ виконується умови 1) – 3), то $f(t)$ є функцією-оригіналом.

**Приклад 2.** Перевірити, чи функція $f(t) = \dfrac{1}{t-2} \cdot \eta(t)$ є функцією-оригіналом.

**Розв'язання.** Функція $f(t)$ не задовольняє умові 2), Оскільки точка $t = 2$ є точкою розриву другого роду (нескінчений розрив). Отже функція $f(t)$ не є функцією-оригіналом.

## 1.2. Методика розв'язування завдання №2

**Приклад 1.** Користуючись означенням, знайти зображення функції

$$f(t) = \mathrm{e}^{3t} \cdot \eta(t).$$

**Розв'язання.** Функція $f(t)$ є оригінал. Для функції $f(t)$ показник зростання $s_0 = 3$. Тому зображення $F(p)$ буде визначено та аналітично на півплощині $\operatorname{Re} p > 3$.

$$F(p)=\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{3t}\cdot \mathrm{e}^{-pt}\,dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^{b} \mathrm{e}^{-(p-3)t}\,dt=\lim_{b\to\infty}\ \frac{1}{-(p-3)}\mathrm{e}^{-(p-3)t}\Big|_0^b=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(-\underbrace{\frac{1}{(p-3)\,\mathrm{e}^{(p-3)b}}}_{\to 0}+\frac{1}{p-3}\right)=\frac{1}{p-3}\,.$$

Отже, $$f(t)=\mathrm{e}^{3t}\leftrightarrow\frac{1}{p-3}=F(p),\qquad \operatorname{Re} p>3\,.$$

**Приклад 2.** Користуючись означенням, знайти зображення функції

$$f(t)=\sin t\cdot\eta(t)\,.$$

**Розв'язання.** Функція $f(t)$ є оригінал, показник зростання $s_0=0$. Тому зображення $F(p)$ буде визначено та аналітично на півплощині $\operatorname{Re} p>0$.

**1 спосіб.** Функцію $f(t)=\sin t$ можна представити у вигляді $\sin t=\dfrac{1}{2i}(\mathrm{e}^{it}-\mathrm{e}^{-it})$. Тоді, за означенням зображення

$$F(p)=\frac{1}{2i}\int_0^{\infty}(\mathrm{e}^{it}-\mathrm{e}^{-it})\cdot\mathrm{e}^{-pt}\,dt=\frac{1}{2i}\lim_{b\to\infty}\left(\int_0^b \mathrm{e}^{-(p-i)t}dt-\int_0^b \mathrm{e}^{-(p+i)t}dt\right)=$$

$$=\frac{1}{2i}\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{p-i}\cdot\mathrm{e}^{-(p-i)t}\Big|_0^b+\frac{1}{p+i}\cdot\mathrm{e}^{-(p+i)t}\Big|_0^b\right)=$$

$$=\frac{1}{2i}\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{p-i}(\mathrm{e}^{-(p-i)b}-1)+\frac{1}{p+i}(\mathrm{e}^{-(p+i)b}-1)\right)=$$

$$=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i}-\frac{1}{p+i}\right)=\frac{1}{2i}\cdot\frac{2i}{p^2+1}=\frac{1}{p^2+1}.$$

Отже, $$f(t)=\sin t\leftrightarrow\frac{1}{p^2+1}=F(p),\qquad \operatorname{Re} p>0\,.$$

**2 спосіб.** За означенням зображення

$$F(p)=\int\limits_0^{\infty}\sin t\cdot\ e^{-pt}\,dt=\lim_{b\to\infty}\int\limits_0^{b}\sin t\cdot\ e^{-pt}\,dt=\left|\begin{matrix} u=\sin t, & du=\cos t dt, \\ dv=e^{-pt}\,dt, & v=-\dfrac{1}{p}e^{-pt}\end{matrix}\right|=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{p}\sin t\cdot e^{-pt}\Big|_0^b+\frac{1}{p}\int\limits_0^{b}\cos t\cdot e^{-pt}\,dt\right)=\left|\begin{matrix} u=\cos t, & du=-\sin t dt, \\ dv=e^{-pt}\,dt, & v=-\dfrac{1}{p}e^{-pt}\end{matrix}\right|=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{p}\left(-\frac{1}{p}\cos t\cdot e^{-pt}\Big|_0^b-\frac{1}{p}\int\limits_0^{b}\sin t\cdot e^{-pt}\,dt\right)=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2}\cdot F(p).$$

Звідси,
$$F(p)=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2}\cdot F(p)\quad\Rightarrow$$

$$F(p)=\frac{1}{1+p^2},\quad(\operatorname{Re}p>0).$$

Отже,
$$f(t)=\sin t\leftrightarrow\frac{1}{p^2+1}=F(p),\qquad \operatorname{Re}p>0.$$

**Приклад 3.** Користуючись означенням, знайти зображення функції
$$f(t)=t\cdot e^{-t}\cdot\eta(t).$$

**Розв'язання.** Функція $f(t)$ є оригінал. Для функції $f(t)$ $s_0=0$. Зображення $F(p)$ буде визначено та аналітично на півплощині $\operatorname{Re}p>0$. За означенням зображення

$$F(p)=\int\limits_0^{\infty}t\cdot e^{-t}\cdot e^{-pt}dt=\lim_{b\to\infty}\int\limits_0^{b}t\cdot e^{-(p+1)t}\,dt=\left|\begin{matrix} u=t, & du=dt, \\ dv=e^{-(p+1)t}\,dt, & v=-\dfrac{e^{-(p+1)t}}{p+1}\end{matrix}\right|=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{t}{p+1}\cdot e^{-(p+1)t}\Big|_0^b+\frac{1}{p+1}\int\limits_0^{b}e^{-(p+1)t}\,dt\right)=$$

$$=-\lim_{b\to\infty}\left(\frac{b\cdot e^{-(p+1)b}}{p+1}+\frac{1}{(p+1)^2}(e^{-(p+1)b}-1)\right)=\frac{1}{p+1^{\ 2}}.$$

Отже,
$$f(t)=t\cdot e^{-t}\leftrightarrow\frac{1}{p+1^{\ 2}}=F(p),\qquad \operatorname{Re}p>0.$$

## 2. ВЛАСТИВОСТ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА

**1. Теорема єдності.** Якщо дві неперервні функції $f_1(t)$ та $f_2(t)$ мають одне і те ж зображення $F(p)$, то вони тотожно рівні.

**2. Теорема лінійності.** Нехай $f_1(t) \leftrightarrow F_1(p)$, $f_2(t) \leftrightarrow F_2(p)$, тоді

$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \leftrightarrow c_1 F_1(p) + c_2 F_2(p)$, де $c_1$, $c_2$ – будь-які сталі.

**3. Теорема подібності.** Нехай $f(t) \leftrightarrow F(p)$, тоді $f(at) \leftrightarrow \dfrac{1}{a} F\left(\dfrac{p}{a}\right)$, де $a$ – будь-яка додатна стала.

**4. Теорема загаювання.** Нехай $f(t) \leftrightarrow F(p)$, тоді $\forall \quad \tau > 0$:

$$f(t-\tau) \cdot \eta(t-\tau) \leftrightarrow F(p) \cdot \mathrm{e}^{-p\tau}.$$

**5. Теорема зміщення (зсуву).** Нехай $f(t) \leftrightarrow F(p)$, тоді $\forall \quad \alpha$:

$$\mathrm{e}^{\alpha t} f(t) \leftrightarrow F(p-\alpha).$$

**6. Теорема диференціювання оригіналу.** Нехай функція $f(t)$ та її похідні $f'(t)$,..., $f^{(n)}(t)$ – оригінали. Якщо $f(t) \leftrightarrow F(p)$, тоді

$$f'(t) \leftrightarrow pF(p) - f(0),$$

$$f''(t) \leftrightarrow p^2 F(p) - p\,f(0) - f'(0),$$

..........................................................................

$$f^{(n)}(t) \leftrightarrow p^{(n)} F(p) - p^{(n-1)} f(0) - p^{(n-2)} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

Якщо $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$, то $f^{(n)}(t) \leftrightarrow p^n F(p)$.

**7. Теорема інтегрування оригінала.** Нехай $f(t) \leftrightarrow F(p)$, тоді

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau \leftrightarrow \frac{F(p)}{p}.$$

**8. Теорема диференціювання зображення.** Нехай $f(t) \leftrightarrow F(p)$, тоді

$$-t\,f(t) \leftrightarrow F'(p),$$

$$t^2 f(t) \leftrightarrow F''(p),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(-t)^{(n)} f(t) \leftrightarrow F^{(n)}(p).$$

**9. Теорема інтегрування зображення.** Нехай $f(t) \leftrightarrow F(p)$ і невласний інтеграл $\int_p^\infty F(\tau)\,d\tau$ – збігається, тоді $\frac{f(t)}{t} \leftrightarrow \int_p^\infty F(\tau)\,d\tau$.

**10. Згортка оригіналів та її зображення.**

**Згорткою** оригіналів називається функція $f_1(t) * f_2(t)$, яка визначається співвідношенням

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(t-\tau)\cdot f_2(\tau)\,d\tau = \int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)\,d\tau.$$

Згорткою оригіналів є оригінал.

**Теорема Бореля** (теорема множення зображень). Нехай $f_1(t) \leftrightarrow F_1(p)$, $f_2(t) \leftrightarrow F_2(p)$, тоді $f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(p)\cdot F_2(p)$.

**11. Формула Дюамеля.**

Якщо $f_1(t) \leftrightarrow F_1(p)$, $f_2(t) \leftrightarrow F_2(p)$, функція $f_1(t)$ неперервна, а функція $f_2(t)$ неперервно-диференційована на $[0,\infty)$, тоді має місце формула **Дюамеля**

$$p\cdot F_1(p)\cdot F_2(p) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow f_1(t)f_2(0)+\int\limits_0^t f_1(t-\tau)f_2'(\tau)\,d\tau \equiv f_1(t)f_2(0)+\int\limits_0^t f_1(\tau)f_2'(t-\tau)\,d\tau\,. \qquad (3)$$

**12. Теорема обернення.** Якщо $f(t)\leftrightarrow F(p)$ та оригінал $f(t)$ – неперервна функція, то має місце формула

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(p)\cdot \mathrm{e}^{pt}dp=\frac{1}{2\pi i}\lim_{b\to\infty}\int\limits_{\gamma-ib}^{\gamma+ib} F(p)\cdot \mathrm{e}^{pt}\,dp,$$

де інтегрування проводиться вздовж будь-якої прямої $\operatorname{Re} p=\gamma$, яка лежить у півплощині $\operatorname{Re} p>s_0$, де $s_0$ – показник зростання функції $f(t)$.

Якщо зображення $F(p)$ має лише скінчене число ізольованих особливих точок $a_1,\ a_2,\dots,\ a_n$ та $\lim\limits_{|p|\to\infty}F(p)=0$, то відповідний оригінал $f(t)$ можна знайти по формулі

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{a_k}\left[F(p)\cdot \mathrm{e}^{pt}\right].$$

**13. Теорема розподілу Хевісайда.** Нехай $F(p)=\dfrac{A_n(p)}{B_m(p)}$ – правильний нескоротний раціональний дріб. Якщо знаменник $B_m(p)$ має нулі $b_1,b_2,\dots,\ b_s$ кратності $m_1,\ m_2,\dots,\ m_s$ відповідно, та $m_1+m_2+\ldots+m_s=m$, то зображенню $F(p)=\dfrac{A_n(p)}{B_m(p)}$ відповідає оригінал

$$f(t)=\sum_{k=1}^{s}\operatorname*{res}_{b_k}\left(\frac{A_n(p)}{B_m(p)}\mathrm{e}^{pt}\right)=\sum_{k=1}^{s}\frac{1}{(m_k-1)!}\lim_{p\to b_k}\frac{d^{m_k-1}}{dp^{m_k-1}}\left((p-b_k)^{m_k}\frac{A_n(p)}{B_m(p)}\mathrm{e}^{pt}\right).$$

Зокрема, якщо всі нулі знаменника $B_m(p)$ прості, то

$$f(t) = \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{res}_{b_k} \left( \frac{A_n(p)}{B_m(p)} \mathrm{e}^{pt} \right) = \sum_{k=1}^{m} \frac{A_n(b_k)}{B'_m(b_k)} \cdot \mathrm{e}^{b_k t}.$$

Оригінал, який відповідає правильному раціональному дробу $F(p) = \dfrac{A_n(p)}{B_m(p)}$, можна також знайти, розклавши цей дріб на суму елементарних дробів та знайшовши відповідні оригінали, використовуючи властивості перетворення Лапласа.

## 3. ТАБЛИЦЯ ОРИГІНАЛІВ ТА ЗОБРАЖЕНЬ

| № | Оригінал $f(t)$ | Зображення $F(p)$ | № | Оригінал $f(t)$ | Зображення $F(p)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\eta\ t$ | $\frac{1}{p}$ | 10 | $e^{\beta t}\operatorname{sh} t$ | $\frac{a}{(p-\beta)^2-a^2}$ |
| 2 | $e^{\beta t}$ | $\frac{1}{p-\beta}$ | 11 | $e^{\beta t}\operatorname{ch} at$ | $\frac{p-\beta}{(p-\beta)^2-a^2}$ |
| 3 | $t$ | $\frac{1}{p^2}$ | 12 | $t^n \quad (n\in Z)$ | $\frac{n!}{p^{n+1}}$ |
| 4 | $\sin at$ | $\frac{a}{p^2+a^2}$ | 13 | $e^{\beta t}\, t^n$ | $\frac{n!}{(p-\beta)^{n+1}}$ |
| 5 | $\cos at$ | $\frac{p}{p^2+a^2}$ | 14 | $t\sin at$ | $\frac{2ap}{(p^2+a^2)^2}$ |
| 6 | $\operatorname{sh} at$ | $\frac{a}{p^2-a^2}$ | 15 | $t\cos at$ | $\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$ |
| 7 | $\operatorname{ch} at$ | $\frac{p}{p^2-a^2}$ | 16 | $t\operatorname{sh} at$ | $\frac{2ap}{(p^2-a^2)^2}$ |
| 8 | $e^{\beta t}\sin at$ | $\frac{a}{(p-\beta)^2+a^2}$ | 17 | $t\operatorname{ch} at$ | $\frac{p^2+a^2}{(p^2-a^2)^2}$ |
| 9 | $e^{\beta t}\cos at$ | $\frac{p-\beta}{(p-\beta)^2+a^2}$ | 18 | $e^{\beta t}\, t\sin at$ | $\frac{2a(p-\beta)}{((p-\beta)^2+a^2)^2}$ |
| | | | 19 | $e^{\beta t}\, t\cos at$ | $\frac{(p-\beta)^2-a^2}{((p-\beta)^2+a^2)^2}$ |

## 3.1. Методика розв’язування завдання №3

**Приклад 1.** Користуючись властивостями перетворення Лапласа, знайти зображення функції-оригінала $f(t)=\operatorname{sh}4t\cdot\cos^2 3t$.

**Розв’язання.** Запишемо функцію $f(t)$ у вигляді

$$f(t)=\operatorname{sh}4t\cdot\cos^2 3t=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{4t}-\mathrm{e}^{-4t})\cdot\frac{1+\cos 6t}{2}=$$

$$=\frac{1}{4}(\mathrm{e}^{4t}-\mathrm{e}^{-4t}+\mathrm{e}^{4t}\cdot\cos 6t-\mathrm{e}^{-4t}\cdot\cos 6t).$$

За таблицею зображень $\quad \mathrm{e}^{4t}\leftrightarrow\frac{1}{p-4},\qquad \mathrm{e}^{-4t}\leftrightarrow\frac{1}{p+4}.$

Оскільки $\cos 6t\leftrightarrow\frac{p}{p^2+6^2}$, то за теоремою зміщення

$$\mathrm{e}^{4t}\cos 6t\leftrightarrow\frac{p-4}{(p-4)^2+6^2},\qquad \mathrm{e}^{-4t}\cos 6t\leftrightarrow\frac{p+4}{(p+4)^2+6^2}.$$

За теоремою лінійності

$$f(t)\leftrightarrow F(p)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{p-4}-\frac{1}{p+4}+\frac{p-4}{(p-4)^2+6^2}-\frac{p+4}{(p+4)^2+6^2}\right)=$$

$$=\frac{2}{p^2-16}+\frac{2p^2-104}{p^4+40p^2+2704}=\frac{4(p^4-14p^2+1768)}{(p^2-16)(p^4+40p^2+2704)}.$$

Отже ,

$$f(t)=\operatorname{sh}4t\cdot\cos^2 3t\leftrightarrow\frac{4(p^4-14p^2+1768)}{(p^2-16)(p^4+40p^2+2704)}=F(p).$$

**Приклад 2.** Користуючись властивостями перетворення Лапласа, знайти зображення функції-оригінала $f(t)=t\operatorname{ch}2t\sin 5t$.

**Розв’язання.** Представимо добуток $\operatorname{ch}2t\sin 5t$ двох функцій у вигляді

$$\operatorname{ch}2t\sin 5t=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^{-2t})\sin 5t=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2t}\sin 5t+\mathrm{e}^{-2t}\sin 5t).$$

Оскільки за таблицею зображень

$$\sin 5t \leftrightarrow \frac{5}{p^2+5^2},$$

то за теоремою зміщення

$$e^{2t}\sin 5t \leftrightarrow \frac{5}{(p-2)^2+5^2}, \qquad e^{-2t}\sin 5t \leftrightarrow \frac{5}{(p+2)^2+5^2}.$$

Тоді за теоремою лінійності $\operatorname{ch} 2t \sin 5t \leftrightarrow$

$$\leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{5}{(p-2)^2+5^2}+\frac{5}{(p+2)^2+5^2}\right)=\frac{5}{2}\left(\frac{1}{p^2-4p+29}+\frac{1}{p^2+4p+29}\right)=$$

$$=\frac{5}{2}\cdot\frac{2(p^2+29)}{p^4+58p^2+841-16p^2}=\frac{5(p^2+29)}{p^4+42p^2+841}.$$

Остаточно, за теоремою диференціювання зображення отримаємо:

$$-t\operatorname{ch} 2t\sin 5t \leftrightarrow \left(\frac{5(p^2+29)}{p^4+42p^2+841}\right)'=$$

$$=5\cdot\frac{2p(p^4+42p^2+841)-(p^2+29)(4p^3+84p)}{(p^4+42p^2+841)^2}=-\frac{10p(p^4+58p^2+377)}{(p^4+42p^2+841)^2}.$$

Отже ,

$$f(t)=t\operatorname{ch} 2t\sin 5t \leftrightarrow \frac{10p(p^4+58p^2+377)}{(p^4+42p^2+841)^2}=F(p).$$

**Приклад 3.** Користуючись властивостями перетворення Лапласа, знайти зображення функції-оригінала $f(t)=t^2\cos 4t$.

**Розв'язання.** Оскільки за таблицею зображень

$$\cos 4t \leftrightarrow \frac{p}{p^2+4^2}=\frac{p}{p+16},$$

то за теоремою диференціювання зображення отримаємо:

$$t^2\cos 4t \leftrightarrow \left(\frac{p}{p^2+16}\right)''=\left(\frac{p^2+16-2p^2}{(p^2+16)^2}\right)'=\left(\frac{16-p^2}{(p^2+16)^2}\right)'=$$

$$=\frac{-2p(p^2+16)^2-2(p^2+16)2p(16-p^2)}{(p^2+16)^4}=\frac{2p(p^2-48)}{(p^2+16)^3}.$$

Отже ,

$$f(t)=t^2\cos 4t \leftrightarrow \frac{2p(p^2-48)}{(p^2+16)^3}=F(p).$$

**Приклад 4.** Користуючись властивостями перетворення Лапласа, знайти зображення функції-оригінала $f(t)=\dfrac{\operatorname{sh}3t}{t}$.

**Розв'язання.** За таблицею зображень $\operatorname{sh}3t \leftrightarrow \dfrac{3}{p^2-9}$. За теоремою інтегрування зображення отримаємо:

$$\frac{\operatorname{sh}3t}{t}\leftrightarrow \int_p^{\infty}\frac{3}{\rho^2-9}\,d\rho=\lim_{b\to\infty}\int_p^{b}\frac{3}{\rho^2-9}\,d\rho=\lim_{b\to\infty}\frac{3}{6}\ln\left|\frac{\rho-3}{\rho+3}\right|\Bigg|_p^b=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(\ln\left|\frac{b-3}{b+3}\right|-\ln\left|\frac{p-3}{p+3}\right|\right)=\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\underbrace{\ln\left|1-\frac{6}{b+3}\right|}_{\to 0}-$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{p-3}{p+3}\right|=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{p-3}{p+3}\right|.$$

Отже,

$$f(t)=\frac{\operatorname{sh}3t}{t}\leftrightarrow\frac{1}{2}\ln\left|\frac{p+3}{p-3}\right|=F(p).$$

**Приклад 5.** Користуючись властивостями перетворення Лапласа, знайти зображення функції-оригінала $f(t)=\dfrac{e^{-5t}\sin t}{t}$.

**Розв'язання.** Оскільки за таблицею зображень $\sin t\leftrightarrow\dfrac{1}{p^2+1}$, то за теоремою зміщення

$$e^{5t}\sin t\leftrightarrow\frac{1}{(p-5)^2+1}.$$

Тоді за теоремою інтегрування зображення отримаємо:

$$\frac{e^{-5t}\sin t}{t}\leftrightarrow\int_p^{\infty}\frac{d\rho}{(\rho+5)^2+1}=\lim_{b\to\infty}\int_p^{b}\frac{d(\rho+5)}{(\rho+5)^2+1}=\lim_{b\to\infty}\operatorname{arctg}(\rho+5)\Big|_p^b=$$

$$= \lim_{b\to\infty} \operatorname{arctg}(b+5) - \operatorname{arctg}(p+5) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(p+5).$$

Отже,

$$f(t) = \frac{e^{-5t}\sin t}{t} \leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(p+5) = F(p).$$

## 3.2. Методика розв'язування завдання №4

**Приклад 1.** Знайти зображення функції $f(t)$ (рис. 3), заданої графічно.

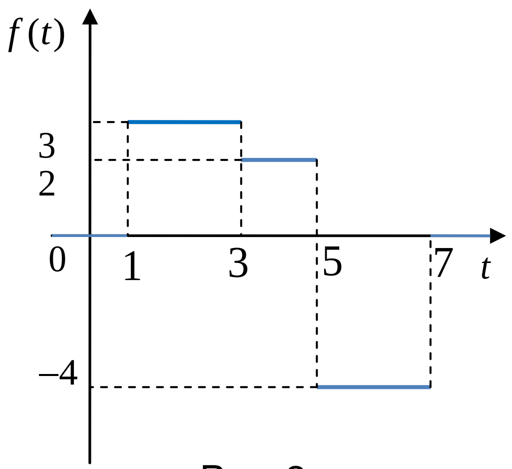


Рис. 3

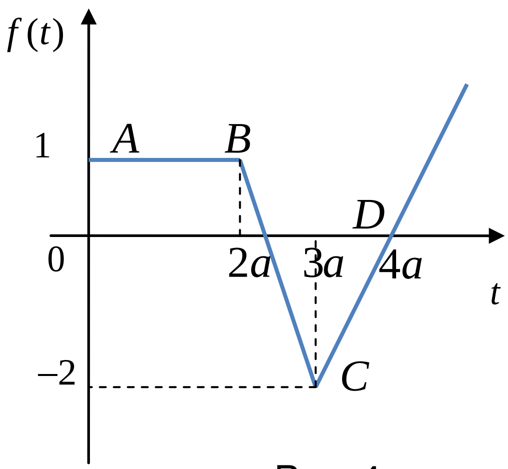


Рис. 4

**Розв'язання.** Запишемо аналітичний вираз для функції $f(t)$, яка зображена на рис. 3:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ 3, & 1 \le t < 3, \\ 2, & 3 \le t < 5, \\ -4, & 5 \le t < 7, \\ 0, & t \ge 7. \end{cases}$$

Використовуючи одиничну функцію Хевісайда, представимо функцію $f(t)$ у вигляді одного аналітичного виразу:

$$f(t)=3\cdot(\eta(t-1)-\eta(t-3))+2\cdot(\eta(t-3)-\eta(t-5))-4\cdot(\eta(t-5)-\eta(t-7))=$$
$$=3\eta(t-1)-3\eta(t-3)+2\eta(t-3)-2\eta(t-5)-4\eta(t-5)+4\eta(t-7)=$$
$$=3\eta(t-1)-\eta(t-3)-6\eta(t-5)+4\eta(t-7).$$

Оскільки $\eta(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{p}$, то за теоремою загаювання отримаємо:

$$f(t)\leftrightarrow F(p)=\frac{3}{p}\mathrm{e}^{-p}-\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-3p}-\frac{6}{p}\mathrm{e}^{-5p}+\frac{4}{p}\mathrm{e}^{-7p}.$$

Отже,

$$F(p)=\frac{1}{p}(3\cdot\mathrm{e}^{-p}-\mathrm{e}^{-3p}-6\cdot\mathrm{e}^{-5p}+4\cdot\mathrm{e}^{-7p}).$$

**Приклад 2.** Знайти зображення функції $f(t)$ (рис. 4), заданої графічно.

**Розв'язання.** Щоб записати аналітичний вираз функції $f(t)$, зображеній на рис. 4, запишемо рівняння прямих $(BC)$ та $(CD)$, знаючи, що $B(2a,1)$, $C(3a,-2)$, $D(4a,0)$. Рівняння прямої, яка проходить через дві точки, має вигляд $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{t-t_1}{t_2-t_1}$. Отже,

$\dfrac{y-1}{-2-1}=\dfrac{t-2a}{3a-2a}\Rightarrow\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{t-2a}{a}\Rightarrow y=7-\dfrac{3t}{a}$ – рівняння прямої $(BC)$.

$\dfrac{y+2}{0+2}=\dfrac{t-3a}{4a-3a}\Rightarrow\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{t-3a}{a}\Rightarrow y=\dfrac{2t}{a}-8$ – рівняння прямої $(CD)$.

$$f\ t\ =\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & 0\le t<2a,\\ 7-\dfrac{3t}{a}, & 2a\le t<3a,\\ \dfrac{2t}{a}-8, & t\ge 3a.\end{cases}$$

Використовуючи одиничну функцію Хевісайда, запишемо функцію $f(t)$ у вигляді одного аналітичного виразу:

$$f(t)=1\cdot(\eta(t)-\eta(t-2a))+\left(7-\frac{3t}{a}\right)\cdot(\eta(t-2a)-\eta(t-3a))+$$

$$+\left(\frac{2t}{a}-8\right)\cdot\eta(t-3a)=\eta(t)-\eta(t-2a)+\left(7-\frac{3t}{a}\right)\eta(t-2a)-$$

$$-\left(7-\frac{3t}{a}\right)\eta(t-3a)+\left(\frac{2t}{a}-8\right)\eta(t-3a)=\eta(t)+$$

$$+\left(6-\frac{3t}{a}\right)\eta(t-2a)+\left(\frac{5t}{a}-15\right)\eta(t-3a)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(t)=\eta(t)-\frac{3}{a}(t-2a)\eta(t-2a)+\frac{5}{a}(t-3a)\eta(t-3a).$$

Оскільки за таблицею зображень

$$\eta(t)\leftrightarrow\frac{1}{p},\quad t\cdot\eta(t)\leftrightarrow\frac{1}{p^2},$$

то за теоремою загаювання отримаємо:

$$f(t)\leftrightarrow F(p)=\frac{1}{p}-\frac{3}{a}\cdot\frac{1}{p^2}\mathrm{e}^{-2ap}+\frac{5}{a}\cdot\frac{1}{p^2}\mathrm{e}^{-3ap}.$$

## 3.3. Методика розв'язування завдань №5-6

**Приклад 1.** Знайти оригінал $f(t)$ по заданому зображенню

$$F(p)=\frac{3-4p}{p^2+6p+14}.$$

**Розв'язання.** Виділимо повний квадрат в знаменнику дробу

$$F(p)=\frac{3-4p}{p^2+6p+14}=\frac{3-4p}{(p+3)^2+5}=\frac{-4\ \ p+3\ \ +15}{(p+3)^2+(\sqrt{5})^2}=$$

$$=-4\frac{(p+3)}{(p+3)^2+(\sqrt{5})^2}+3\sqrt{5}\frac{\sqrt{5}}{(p+3)^2+(\sqrt{5})^2}.$$

Оскільки за таблицею зображень

$$\cos\sqrt{5}t\leftrightarrow\frac{p}{p^2+5},\qquad \sin\sqrt{5}t\leftrightarrow\frac{\sqrt{5}}{p^2+5},$$

то за теоремою зміщення

$$e^{-3t}\cos\sqrt{5}t \leftrightarrow \frac{(p+3)}{(p+3)^2+(\sqrt{5})^2},$$

$$e^{-3t}\sin\sqrt{5}t \leftrightarrow \frac{\sqrt{5}}{(p+3)^2+(\sqrt{5})^2}.$$

Отже, за теоремою лінійності

$$F(p)=\frac{3-4p}{p^2+6p+14} \leftrightarrow -4\cdot e^{-3t}\cos\sqrt{5}t+3\sqrt{5}\cdot e^{-3t}\sin\sqrt{5}t=f(t).$$

**Приклад 2.** Знайти оригінал $f(t)$ по заданому зображенню

$$F(p)=\frac{p}{(p^2+9)^2}.$$

**Розв'язання.** Оскільки за таблицею зображень $\sin 3t \leftrightarrow \frac{3}{p^2+9}$, то за теоремою диференціювання зображення

$$-t\sin 3t \leftrightarrow \left(\frac{3}{p^2+9}\right)' = -\frac{6p}{(p^2+9)^2}.$$

Отже,

$$F(p)=\frac{p}{(p^2+9)^2} \leftrightarrow f(t)=\frac{1}{6}t\sin 3t.$$

**Приклад 3.** Знайти оригінал $f(t)$ по заданому зображенню

$$F(p)=\frac{p^2}{(p^2+4)^2}.$$

**Розв'язання.** За теоремою Бореля множенню зображень відповідає згортка оригіналів, тому

$$F(p)=\frac{p^2}{(p^2+4)^2}=\frac{p}{p^2+2^2}\cdot\frac{p}{p^2+2^2} \leftrightarrow \cos 2t * \cos 2t = f(t).$$

$$f(t)=\cos 2t * \cos 2t = \int_0^t \cos 2(t-\tau)\cos 2\tau\, d\tau =$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^t (\cos(2t-2\tau+2\tau)+\cos(2t-2\tau-2\tau))\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^t (\cos 2t+\cos(2t-4\tau))d\tau=\frac{1}{2}\cos 2t\int\limits_0^t d\tau+\frac{1}{2}\int\limits_0^t \cos\left(2t-4\tau\right)d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}t\cos 2t-\frac{1}{8}\sin(2t-4\tau)\Big|_0^t=\frac{1}{2}t\cos 2t-\frac{1}{8}\sin(2t-4t)+\frac{1}{8}\sin 2t=$$

$$=\frac{1}{2}t\cos 2t+\frac{1}{8}\sin 2t+\frac{1}{8}\sin 2t=\frac{1}{2}t\cos 2t+\frac{1}{4}\sin 2t.$$

Отже ,

$$F(p)=\frac{p^2}{(p^2+4)^2}\leftrightarrow\frac{1}{2}t\cos 2t+\frac{1}{4}\sin 2t=f(t).$$

**Приклад 4.** Знайти оригінал $f(t)$ по заданому зображенню

$$F(p)=\frac{p^3+3p^2+p+4}{(p+2)^2(p^2+1)}.$$

**Розв’язання.** Розкладемо дробово-раціональну функцію на суму елементарних дробів

$$F(p)=\frac{p^3+3p^2+p+4}{(p+2)^2(p^2+1)}=\frac{A}{p+2}+\frac{B}{(p+2)^2}+\frac{Cp+D}{p^2+1}.$$

Звідси,

$$p^3+3p^2+p+4=A(p+2)(p^2+1)+B(p^2+1)+(Cp+D)(p+2)^2.$$

Знайдемо значення коефіцієнтів $A,\ B,\ C,\ D$:

$$p=-2:\ \ 6=5B\Rightarrow B=\frac{6}{5},$$

$$p=i\quad:\ -i-3+i+4=(Ci+D)(i+2)^2\Rightarrow 1=(Ci+D)(3+4i)$$

$$\Rightarrow\qquad 1=(3D-4C)+i(3C+4D)$$

$$\Rightarrow\qquad \begin{cases}1=3D-4C,\\ 0=3C+4D,\end{cases}\quad\Rightarrow\quad C=-\frac{4}{25},\quad D=\frac{3}{25}.$$

$$p=0\quad:\ 4=2A+B+4D\Rightarrow 4=2A+\frac{6}{5}+\frac{12}{25}\Rightarrow A=2-\frac{21}{25}\Rightarrow A=\frac{29}{25}.$$

Отже,

$$F(p)=\frac{29}{25}\cdot\frac{1}{p+2}+\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{(p+2)^2}-\frac{4}{25}\cdot\frac{p}{p^2+1}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{p^2+1}.$$

Оскільки за таблицею зображень $t\leftrightarrow\frac{1}{p^2}$, то за теоремою зміщення

$$e^{-2t}\,t\leftrightarrow\frac{1}{(p+2)^2}.$$

Тоді
$$F(p)=\frac{p^3+3p^2+p+4}{(p+2)^2(p^2+1)}\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\frac{29}{25}\cdot e^{-2t}+\frac{6}{5}\cdot t\,e^{-2t}-\frac{4}{25}\cdot\cos t+\frac{3}{5}\cdot\sin t=f(t).$$

**Приклад 5.** Знайти оригінал $f(t)$ по заданому зображенню

$$F(p)=\frac{p^2-4p+7}{p(p+4)(p-3)}.$$

**Розв'язання.** За допомогою теореми Хевісайда знайдемо оригінал для даного зображення.

$$F(p)=\frac{p^2-4p+7}{p(p+4)(p-3)}\leftrightarrow f(t)=\underset{\substack{0\\ m=1}}{\operatorname{res}}F(p)e^{pt}+\underset{\substack{-4\\ m=1}}{\operatorname{res}}F(p)e^{pt}+\underset{\substack{3\\ m=1}}{\operatorname{res}}F(p)e^{pt}=$$

$$=\lim_{p\to0}\frac{p^2-4p+7}{(p+4)(p-3)}e^{pt}+\lim_{p\to-4}\frac{p^2-4p+7}{p(p-3)}e^{pt}+\lim_{p\to3}\frac{p^2-4p+7}{p(p+4)}e^{pt}=$$

$$=-\frac{7}{12}+\frac{39}{28}e^{-4t}+\frac{4}{21}e^{3t}.$$

Отже,

$$F(p)=\frac{p^2-4p+7}{p(p+4)(p-3)}\leftrightarrow-\frac{7}{12}+\frac{39}{28}e^{-4t}+\frac{4}{21}e^{3t}=f(t).$$

## 4. ЗАСТОСУВАННЯ ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ.

## ЗАГАЛЬНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ

Нехай потрібно знайти розв'язок лінійного диференціального рівняння

$$a_0 x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 x'(t) + a_n x(t) = f(t), \tag{4}$$

що задовольняє початковим умовам

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1, \ldots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}. \tag{5}$$

Якщо $f(t) \leftrightarrow F(p)$, а $x(t) \leftrightarrow X(p)$, то за теоремою диференціювання оригінала

$$\begin{cases} x'(t) \leftrightarrow pX(p) - x(0) = pX(p) - x_0, \\ x''(t) \leftrightarrow p^2 X(p) - px(0) - x'(0) = p^2 X(p) - px_0 - x_1, \\ x'''(t) \leftrightarrow p^3 X(p) - p^2 x(0) - px'(0) - x''(0) = p^3 X(p) - p^2 x_0 - px_1 - x_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Замінимо в диференціальному рівнянні (4) оригінали їх зображеннями. В результаті отримаємо операторне рівняння, яке буде алгебраїчним:

$$L_n(p) X(p) - B(p) = F(p), \tag{6}$$

де

$$L_n(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n,$$

$$B(p) = a_0 (p^{n-1} x_0 + p^{n-2} x_1 + \ldots + x_{n-1}) +$$

$$+ a_1 (p^{n-2} x_0 + p^{n-3} x_1 + \ldots + x_{n-2}) + \ldots + a_{n-1} x_0$$

Розв'язок рівняння (6) буде мати вигляд

$$X(p) = \frac{F(p) + B(p)}{L_n(p)}.$$

У випадку, коли початкові умови нульові

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \ldots, \quad x^{(n-1)}(0) = 0, \tag{7}$$

многочлен $B(p) = 0$, то розв'язок рівняння (6) буде мати вигляд

$$X(p) = \frac{F(p)}{L_n(p)}.$$

Знайшовши оригінал $x(t)$, який відповідає зображенню $X(p)$, отримаємо розв'язок задачі Коші (4) - (5).

## 4.1. Методика розв'язування завдань №7-8

**Приклад 1.** Знайти розв'язок диференціального рівняння $x'' + 4x' + 4x = t^3 \, e^{-2t}$, що задовольняє початковим умовам $x(0) = 1, \quad x'(0) = 2$ (розв'язати задачу Коші).

**Розв'язання.** Нехай $x(t) \leftrightarrow X(p)$, тоді за теоремою диференціювання оригінала

$$x'(t) \leftrightarrow pX(p) - x(0) = pX(p) - 1,$$

$$x''(t) \leftrightarrow p^2 X(p) - px(0) - x'(0) = p^2 X(p) - p - 2.$$

Оскільки за таблицею зображень $t^3 \leftrightarrow \dfrac{3}{p^4}$, то за теоремою зміщення

$$e^{-2t} \, t^3 \leftrightarrow \frac{3\,!}{(p+2)^4}.$$

Складемо операторне рівняння, яке відповідає заданому диференціальному

$$p^2X(p)-p-2+4pX(p)-4+4X(p)=\frac{3\,!}{(p+2)^4},$$

$$X(p)(p^2+4p+4)-p-6=\frac{3\,!}{(p+2)^4},$$

$$X(p)=\frac{3\,!}{(p+2)^6}+\frac{p+6}{(p+2)^2}=\frac{3!}{5!}\frac{5!}{(p+2)^6}+\frac{1}{p+2}+\frac{4}{(p+2)^2}\;-$$

розв'язок операторного рівняння. Знайдемо його оригінал. Оскільки за таблицею зображень

$$t^5 \leftrightarrow \frac{5!}{p^6}, \qquad\qquad t \leftrightarrow \frac{1}{p^2},$$

то за теоремою зміщення

$$e^{-2t}\,t^5 \leftrightarrow \frac{5!}{(p+2)^6}, \qquad\qquad e^{-2t}\,t \leftrightarrow \frac{1}{(p+2)^2}.$$

Тому за теоремою лінійності

$$X(p) \leftrightarrow x(t)=\frac{3!}{5!}t^5\,e^{-2t}+e^{-2t}+4t\,e^{-2t}.$$

Отже,
$$x(t)=e^{-2t}\left(1+4t+\frac{t^5}{20}\right)$$

– розв'язок диференціального рівняння.

**Приклад 2.** Знайти розв'язок диференціального рівняння $x'''+x''=\sin t$, що задовольняє початковим умовам $x(0)=x'(0)=1, \quad x''(0)=0$ (розв'язати задачу Коші).

**Розв'язання.** Нехай $x(t)\leftrightarrow X(p)$, тоді за теоремою диференціювання оригінала

$$x'(t)\leftrightarrow X(p)-x(0)=X(p)-1,$$
$$x''(t)\leftrightarrow p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)-p-1,$$

$$x'''(t) \leftrightarrow p^3X(p) - p^2x(0) - px'(0) - x''(0) = p^3X(p) - p^2 - p,$$

за таблицею зображень $\qquad \sin t \leftrightarrow \dfrac{1}{p^2+1}.$

Складемо операторне рівняння, яке відповідає заданому диференціальному

$$p^3X(p) - p^2 - p + p^2X(p) - p - 1 = \frac{1}{p^2+1},$$

$$X(p)(p^3+p^2) = \frac{1}{p^2+1} + (p+1)^2 \Rightarrow$$

$$X(p) = \frac{1}{p^2(p+1)(p^2+1)} + \frac{p+1}{p^2} \ –$$

розв’язок операторного рівняння. Знайдемо його оригінал. Для цього представимо зображення у вигляді суми елементарних дробів:

$$\frac{1}{p^2(p+1)(p^2+1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p+1} + \frac{Dp+E}{p^2+1}.$$

Знайдемо значення коефіцієнтів $A,\ B, C, D, E$:

$$1 = Ap(p+1)(p^2+1) + B(p+1)(p^2+1) + Cp^2(p^2+1) + (Dp+E)p^2(p+1);$$

$p=0 \quad : \quad B=1,$

$p=-1 \ : \quad C=0.5,$

$$\left.\begin{array}{lll} p^4 & : & 0 = A+C+D, \\ p^3 & : & 0 = A+B+D+E, \\ p^2 & : & 0 = A+B+C+E, \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A+0.5+D=0, \\ A+1+D+E=0, \\ C-D=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1, \\ E=-0.5, \\ D=0.5. \end{cases}$$

Отже, $\qquad X(p) = -\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p^2} + \dfrac{1}{2(p+1)} + \dfrac{p-1}{2(p^2+1)} + \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p^2} =$

$$= \frac{2}{p^2} + \frac{1}{2(p+1)} + \frac{p}{2(p^2+1)} - \frac{1}{2(p^2+1)} \Rightarrow$$

$$X(p) \leftrightarrow x(t) = 2t + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos t\,.$$

Отже, $$x(t) = 2t + \frac{1}{2}(e^{-t} + \sin t - \cos t)$$

– розв'язок диференціального рівняння.

**Приклад 3.** Розв'язати задачу Коші

$$x'' - 4x' + 5x = 2\,e^{2t}(\sin t + \cos t)\,,\ x(0) = 1, \quad x'(0) = 2\,.$$

**Розв'язання.** Нехай $x(t) \leftrightarrow X(p)$, тоді за теоремою диференціювання оригінала

$$x'(t) \leftrightarrow pX(p) - x(0) = pX(p) - 1,$$
$$x''(t) \leftrightarrow p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) - p - 2.$$

Знайдемо зображення, яке відповідає правої частині заданого диференціального рівняння. За таблицею зображень

$$\sin t \leftrightarrow \frac{1}{p^2+1}, \qquad \cos t \leftrightarrow \frac{p}{p^2+1},$$

за теоремою зміщення

$$e^{2t}\sin t \leftrightarrow \frac{1}{(p-2)^2+1} = \frac{1}{p^2-4p+5},$$

$$e^{2t}\cos t \leftrightarrow \frac{p-2}{(p-2)^2+1} = \frac{p-2}{p^2-4p+5}.$$

Тоді за теоремою лінійності

$$2\,e^{2t}(\sin t + \cos t) \leftrightarrow 2\left(\frac{1}{p^2-4p+5} + \frac{p-2}{p^2-4p+5}\right) = \frac{2(p-1)}{p^2-4p+5}.$$

Перейдемо від диференціального рівняння до операторного:

$$p^2X(p)-p-2-4pX(p)+4+5X(p)=\frac{2(p-1)}{p^2-4p+5},$$

$$(p^2-4p+5)X(p)=p-2+\frac{2(p-1)}{p^2-4p+5},$$

$$X(p)=\frac{p-2}{p^2-4p+5}+\frac{2(p-1)}{(p^2-4p+5)^2}=\frac{p-2}{p^2-4p+5}+\frac{(2p-4)+2}{(p^2-4p+5)^2},$$

$$X(p)=\frac{p-2}{p^2-4p+5}+\frac{2p-4}{(p^2-4p+5)^2}+\frac{2}{(p^2-4p+5)^2}\quad -$$

розв'язок операторного рівняння. Знайдемо оригінал $x(t)$, який відповідає отриманому зображенню $X(p)$.

1. $\dfrac{p-2}{p^2-4p+5}=\dfrac{p-2}{(p-2)^2+1}\leftrightarrow \mathrm{e}^{2t}\cos t$ – за теоремою зміщення.

2. $\dfrac{1}{p^2-4p+5}=\dfrac{1}{(p-2)^2+1}\leftrightarrow \mathrm{e}^{2t}\sin t$ – за теоремою зміщення.

$\left(\dfrac{1}{p^2-4p+5}\right)'=-\dfrac{2p-4}{(p^2-4p+5)^2}\leftrightarrow -t\,\mathrm{e}^{2t}\sin t$ – за теоремою диференціювання зображення.

3. $\dfrac{2}{(p^2-4p+5)^2}=2\dfrac{1}{(p-2)^2+1}\cdot\dfrac{1}{(p-2)^2+1}\leftrightarrow 2\,\mathrm{e}^{2t}\sin t*\mathrm{e}^{2t}\sin t$ – за теоремою Бореля добутку зображень відповідає згортка оригіналів.

Знайдемо окремо згортку оригіналів

$$2\,\mathrm{e}^{2t}\sin t*\mathrm{e}^{2t}\sin t=2\int_0^t e^{2(t-\tau)}\sin(t-\tau)\cdot\mathrm{e}^{2\tau}\sin\tau\,d\tau=$$

$$= 2\,e^{2t}\int\limits_0^t \sin(t-\tau)\sin\tau\; d\tau = e^{2t}\int\limits_0^t (\cos(t-\tau-\tau)-\cos(t-\tau+\tau))\; d\tau =$$

$$= e^{2t}\int\limits_0^t (\cos(t-2\tau)-\cos t)\; d\tau = e^{2t}\left(-\frac{1}{2}\sin(t-2\tau)-\tau\cos t\right)\Bigg|_0^t =$$

$$= e^{2t}\left(\frac{1}{2}\sin t+\frac{1}{2}\sin t-t\cos t\right) = e^{2t}(\sin t - t\cos t).$$

Отже, $\qquad X(p) \leftrightarrow x(t) = e^{2t}\cos t + t\,e^{2t}\sin t + e^{2t}(\sin t - t\cos t)\,.$

$$x(t) = e^{2t}((1-t)\cos t + (1+t)\sin t)$$

– розв’язок диференціального рівняння.

**Приклад 4.** Розв’язати задачу Коші

$$x'' + x = t\sin t\,, \quad x(0) = x'(0) = 0\,.$$

**Розв’язання.** Нехай $x(t) \leftrightarrow X(p)$, тоді за теоремою диференціювання оригінала

$$x'(t) \leftrightarrow pX(p) - x(0) = pX(p),$$
$$x''(t) \leftrightarrow p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p).$$

За таблицею зображень $\sin t \leftrightarrow \dfrac{1}{p^2+1}$, за теоремою диференціювання зображення $\qquad t\sin t \leftrightarrow -\left(\dfrac{1}{p^2+1}\right)' = \dfrac{2p}{(p^2+1)^2}\,.$

Операторне рівняння, яке відповідає заданому диференціальному, буде мати такий вигляд

$$p^2X(p)+X(p)=\frac{2p}{(p^2+1)^2} \qquad \Rightarrow$$

$$X(p)=\frac{2p}{(p^2+1)^3}.$$

Оригінал, який відповідає отриманому зображенню, знайдемо за теоремою Хевісайда

$$x(t)=\underset{\substack{i\\ m=3}}{res}\; X(p)\,\mathrm{e}^{pt}+\underset{\substack{-i\\ m=3}}{res}\; X(p)\,\mathrm{e}^{pt}.$$

Кожен лишок знайдемо окремо:

$$\underset{\substack{i\\ m=3}}{res}\; X(p)\,\mathrm{e}^{pt}=\frac{1}{2!}\lim_{p\to i}\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{2p\,\mathrm{e}^{pt}}{(p^2+1)^3}(p-i)^3\right)=\lim_{p\to i}\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{p\,\mathrm{e}^{pt}}{(p+i)^3}\right)=$$

$$=\lim_{p\to i}\frac{d}{dp}\left(\frac{(\mathrm{e}^{pt}+pt\,\mathrm{e}^{pt})(p+i)^3-3(p+i)^2p\,\mathrm{e}^{pt}}{(p+i)^6}\right)=$$

$$=\lim_{p\to i}\frac{d}{dp}\left(\frac{(\mathrm{e}^{pt}+pt\,\mathrm{e}^{pt})(p+i)-3p\,\mathrm{e}^{pt}}{(p+i)^4}\right)=\lim_{p\to i}\frac{d}{dp}\left(\frac{\mathrm{e}^{pt}(p^2t-2p+pti+i)}{(p+i)^4}\right)=$$

$$=\lim_{p\to i}\left(\frac{\mathrm{e}^{pt}(p^2t^2+pt^2i+2it-2)(p+i)-4(p^2t-2p+pti+i)}{(p+i)^5}\right)=$$

$$=\mathrm{e}^{it}\,\frac{(-t^2-t^2+2it-2)(2i)-4(-t-t-i)}{(2i)^5}=$$

$$=\mathrm{e}^{it}\cdot\frac{-4t^2i-4t-4i+8t+4i}{32i}=-\mathrm{e}^{it}\cdot\frac{t^2+ti}{8}.$$

Аналогічно можна отримати

$$\underset{\substack{-i\\ m=3}}{res}\ X(p)\,e^{pt} = \frac{1}{2!}\lim_{p\to -i}\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{2p\,e^{pt}}{(p^2+1)^3}(p+i)^3\right) =$$

$$= \lim_{p\to -i}\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{p\,e^{pt}}{(p-i)^3}\right) = -e^{-it}\,\frac{t^2-ti}{8}.$$

$$x(t) = \underset{\substack{i\\ m=3}}{res}\ X(p)\,e^{pt} + \underset{\substack{-i\\ m=3}}{res}\ X(p)\,e^{pt} = -\frac{e^{it}(t^2+ti)}{8} - \frac{e^{-it}(t^2-ti)}{8} =$$

$$= -t^2\,\frac{e^{it}+e^{-it}}{8} + ti\,\frac{e^{-it}-e^{it}}{8} = -\frac{t^2}{4}\cos t + \frac{t}{4}\sin t = \frac{1}{4}(-t^2\cos t + t\sin t).$$

Отже,

$$x(t) = \frac{1}{4}(-t^2\cos t + t\sin t)$$

– розв’язок диференціального рівняння.

## 5. ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛА ДЮАМЕЛЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ З НУЛЬОВИМИ ПОЧАТКОВИМИ УМОВАМИ

Нехай потрібно знайти розв’язок лінійного диференціального рівняння

$$a_0 x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 x'(t) + a_n x(t) = f(t), \tag{8}$$

що задовольняє початковим умовам

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1, \ldots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}. \tag{9}$$

### 1. Розв’яжемо спочатку допоміжну задачу Коші

$$\begin{cases} a_0 x_1^{(n)} + a_1 x_1^{(n-1)} + \ldots + a_1 x_1' + a_n x_1 = \eta(t), \\ x_1(0) = x_1'(0) = \ldots = x_1^{(n-1)}(0) = 0, \end{cases} \tag{10}$$

де $\eta(t)$ – одинична функція Хевісайда.

Операторне рівняння, яке відповідає задачі Коші (1) буде мати такий вигляд

$$L_n(p)X_1(p) = \frac{1}{p} \quad \Rightarrow \quad X_1(p) = \frac{1}{pL_n(p)}. \tag{11}$$

Знайшовши оригінал $x_1(t)$, отримаємо розв'язок задачі Коші (10).

**2. Розв'яжемо початкову задачу Коші.** Операторне рівняння, яке відповідає задачі Коші (9) буде мати такий вигляд

$$L_n(p)X(p) = F(p) \quad \Rightarrow$$

$$X(p) = \frac{F(p)}{L_n(p)} = F(p) \cdot p \cdot \frac{1}{pL_n(p)},$$

але згідно з співвідношеннями (10) та (11) можна записати

$$X(p) = p \cdot F(p) \cdot X_1(p) \leftrightarrow x_1'(t) * f(t) + x_1'(0)f(t) = x_1'(t) * f(t).$$

Отже, розв'язок задачі Коші можна визначити за допомогою інтеграла Дюамеля

$$x(t) = \int_0^t x_1'(t-\tau)f(\tau)d\tau, \tag{12}$$

де $f(t)$ – права частина диференціального рівняння (8).

**Зауваження.** Формулу (12) зручно використовувати у випадку, коли знаходження зображення $F(p)$, яке відповідає правої частині $f(t)$ диференціального рівняння (8) викликає труднощі.

## 5.1. Методика розв'язування завдання №9

**Приклад 1.** За допомогою інтеграла Дюамеля знайти розв'язок диференціального рівняння $x'' + 2x' + x = \frac{e^{-t}}{1+t}$, що задовольняє початковим умовам $x(0) = x'(0) = 0$.

**Розв'язання. 1.** Розв'яжемо допоміжну задачу Коші:

$$x_1'' + 2x_1' + x_1 = \eta(t).$$

Нехай $x_1(t) \leftrightarrow X_1(p)$, тоді за теоремою диференціювання оригінала

$$x_1'(t) \leftrightarrow pX_1(p), \qquad x_1''(t) \leftrightarrow p^2 X_1(p), \qquad \eta(t) \leftrightarrow \frac{1}{p}.$$

Операторне рівняння буде мати такий вигляд

$$p^2 X_1(p) + 2pX_1(p) + X_1(p) = \frac{1}{p} \quad \Rightarrow$$

$$X_1(p) = \frac{1}{p(p+1)^2}.$$

$$X_1(p) = \frac{1}{p(p+1)^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{(p+1)^2}.$$

Знайдемо коефіцієнти $A, B, C: \ 1 = A(p+1)^2 + B(p+1) + Cp$

$$\begin{aligned} p = 0 \quad &: \quad A = 1, \\ p = -1 \quad &: \quad C = -1, \\ p^2 \quad &: \quad 0 = A + B \Rightarrow B = -1. \end{aligned}$$

Отже, $$X_1(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2} \leftrightarrow t - \mathrm{e}^{-t} - t\,\mathrm{e}^{-t} = x_1(t).$$

Розв'язок допоміжної задачі Коші: $x_1(t) = t - \mathrm{e}^{-t} - t\,\mathrm{e}^{-t}$.

**2. Розв'язок початкової задачі Коші** знаходимо за допомогою інтеграла Дюамеля:

$$x(t) = \int_0^t x_1'(t-\tau) f(\tau)\, d\tau,$$

де $\qquad f(t)=\dfrac{e^{-t}}{1+t}, \qquad x_1'(t)=e^{-t}-e^{-t}+t\,e^{-t}=t\,e^{-t}.$

Отже, $\qquad x(t)=\int\limits_0^t (t-\tau)e^{-(t-\tau)}\cdot\dfrac{e^{-\tau}}{1+\tau}\,d\tau=\int\limits_0^t \dfrac{e^{-t}(t-\tau)}{1+\tau}\,d\tau=$

$$=e^{-t}\,t\int\limits_0^t \frac{d\tau}{1+\tau}-e^{-t}\int\limits_0^t \frac{(\tau+1-1)}{1+\tau}d\tau==e^{-t}\,t\,\ln\left|1+\tau\right|\Big\|_0^t-e^{-t}\,\tau\Big|_0^t+$$

$$+e^{-t}\,\ln\left|1+\tau\right|\Big\|_0^t=e^{-t}t\,\ln\left|1+t\right|-e^{-t}\,t+e^{-t}\,\ln\left|1+t\right|=e^{-t}((t+1)\ln\left|1+t\right|-t).$$

$$x(t)=e^{-t}((t+1)\ln\left|1+t\right|-t)$$

– розв'язок диференціального рівняння.

**Приклад 2.** За допомогою інтеграла Дюамеля знайти розв'язок диференціального рівняння $x''+x=\dfrac{1}{2+\cos t}$, що задовольняє нульовим початковим умовам $x(0)=x'(0)=0$.

**Розв'язання. 1.** Розв'яжемо допоміжну задачу: $x_1''+x_1=\eta(t)$. Нехай $x_1(t)\leftrightarrow X_1(p)$, тоді за теоремою диференціювання оригінала

$$x_1'(t)\leftrightarrow pX_1(p), \qquad x_1''(t)\leftrightarrow p^2X_1(p), \qquad \eta(t)\leftrightarrow\frac{1}{p}.$$

Операторне рівняння буде мати такий вигляд

$$p^2X_1(p)+X_1(p)=\frac{1}{p} \qquad \Rightarrow$$

.

$$X_1(p)=\frac{1}{p(p^2+1)}=\frac{A}{p}+\frac{Bp+C}{p^2+1}.$$

Знайдемо коефіцієнти $A, B, C$ : $\qquad 1=A(p^2+1)+Bp^2+Cp$

$$p=0 \quad : \quad A=1,$$
$$p=i \quad : \quad 1=-B+iC \quad \Rightarrow \quad B=-1, \quad C=0.$$

Отже, $$X_1(p)=\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+1}\leftrightarrow 1-\cos t=x_1(t).$$

Розв'язок допоміжної задачі Коші: $x_1(t)=1-\cos t$.

2. Розв'язок початкової задачі Коші знаходимо за допомогою інтеграла Дюамеля:

$$x(t)=\int_0^t x_1'(t-\tau)f(\tau)\,d\tau,$$

де $$f(t)=\frac{1}{2+\cos t}, \qquad x_1'(t)=\sin t.$$

Тоді $$x(t)=\int_0^t \frac{\sin(t-\tau)}{2+\cos\tau}\,d\tau=\int_0^t \frac{\sin t\cos\tau-\cos t\sin\tau}{2+\cos\tau}\,d\tau=$$

$$=\sin t\int_0^t \frac{\cos\tau}{2+\cos\tau}\,d\tau-\cos t\int_0^t \frac{\sin\tau}{2+\cos\tau}\,d\tau=\sin t\cdot I_1+\cos t\cdot I_2.$$

Обчислимо окремо кожен інтеграл

$$I_1=\int_0^t \frac{\cos\tau}{2+\cos\tau}\,d\tau=\int_0^t \frac{2+\cos\tau-2}{2+\cos\tau}\,d\tau=t-2\int_0^t \frac{d\tau}{2+\cos\tau}=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=\operatorname{tg}\dfrac{\tau}{2}, \quad \tau=2\operatorname{arctg}u, \quad d\tau=\dfrac{2du}{1+u^2}. \\ \cos\tau=\dfrac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \left|\dfrac{\tau}{u}\right|\dfrac{0}{0}\left|\dfrac{t}{\operatorname{tg}t/2}\right| \end{matrix}\right|=t-2\int_0^{tg\,t/2}\frac{2du}{(1+u^2)\left(2+\dfrac{1-u^2}{1+u^2}\right)}=$$

$$=t-4\int_0^{tg\,t/2}\frac{2du}{u^2+3}=t-\frac{4}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt3}\Big|_0^{tg\,t/2}=t-\frac{4}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt3}\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right).$$

$$I_2 = \int_0^t \frac{\sin\tau}{2+\cos\tau}\,d\tau = \int_0^t \frac{d(2+\cos\tau)}{2+\cos\tau} = \ln|2+\cos\tau|\Big|_0^t = \ln|2+\cos t| + \ln 3.$$

Отже, розв'язок диференціального рівняння має такий вигляд

$$x(t) = \sin t \cdot I_1 + \cos t \cdot I_2 =$$

$$= \sin t\left(t - \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)\right) + \cos t\ \ln\left|2+\cos t\right| + \ln 3\ .$$

## 5.2. Методика розв'язування завдання №10

**Приклад 1.** Матеріальна точка маси $m$ рухається прямолінійно під дією сили притяжіння до нерухомого центру, що пропорційна відстані точки до центру (коефіцієнт пропорційності $mk^2$). Сила опору середовища пропорційна швидкості (коефіцієнт пропорційності $2mh > 0$). В початковий момент відстань від точки до центру дорівнює $a$, швидкість напрямлена по прямій, яка з'єднує точку з центром і дорівнює $v_0$. Знайти закон руху точки, за умови, що $h < k$.

**Розв'язання.** За другим законом Ньютона маємо $\vec{F} = m\vec{a}$, де $\vec{a}$ – вектор прискорення, $m$ – маса, $\vec{F}$ – рівнодіюча прикладених до точки сил. За умовами задачі $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, де $\vec{F}_1$ – сила притяжіння, $\vec{F}_2$ – сила опору. Диференціальне рівняння руху вздовж осі $0x$ буде мати вигляд:

$$m\vec{a} = -mk^2x - 2mh\frac{dx}{dt},$$

де $x(t)$ – відстань точки до центру. Отже потрібно розв'язати диференціальне рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h\frac{dx}{dt} + k^2x = 0$$

з початковими умовами $x(0) = a$, $x'(0) = v_0$.

Нехай $x(t) \leftrightarrow X(p)$, тоді за теоремою диференціювання оригінала

$$x'(t) \leftrightarrow pX(p) - x(0) = pX(p) - a,$$

$$x''(t) \leftrightarrow p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) - ap - v_0.$$

Запишемо операторний вигляд диференціального рівняння:

$$p^2X(p) - ap - v_0 + 2hpX(p) - 2ha + k^2X(p) = 0,$$

$$X(p)(p^2 + 2hp + k^2) = ap + 2ha + v_0,$$

$$X(p) = \frac{ap + 2ha + v_0}{(p^2 + 2hp + k^2)} = \frac{a(p+h)}{(p+h)^2 + k^2 - h^2} + \frac{ha + v_0}{(p+h)^2 + k^2 - h^2} =$$

$$= a \cdot \frac{(p+h)}{(p+h)^2 + (k^2 - h^2)} + \frac{ha + v_0}{\sqrt{k^2 - h^2}} \cdot \frac{\sqrt{k^2 - h^2}}{(p+h)^2 + (k^2 - h^2)},$$

оскільки $h < k$.

Звідси $\frac{p}{p^2 + (k^2 - h^2)} \leftrightarrow \cos\sqrt{k^2 - h^2}$, $\frac{\sqrt{k^2 - h^2}}{p^2 + (k^2 - h^2)} \leftrightarrow \sin\sqrt{k^2 - h^2}$,

а за теоремою зміщення

$$\frac{(p+h)}{(p+h)^2 + k^2 - h^2} \leftrightarrow \mathrm{e}^{-ht}\cos\sqrt{k^2 - h^2},$$

$$\frac{\sqrt{k^2 - h^2}}{(p+h)^2 + k^2 - h^2} \leftrightarrow \mathrm{e}^{-ht}\sin\sqrt{k^2 - h^2}.$$

Отже,

$$X(p) \leftrightarrow x(t) = a\,\mathrm{e}^{-ht}\cos\sqrt{k^2-h^2} + \frac{ha+v_0}{k^2-h^2}\cdot \mathrm{e}^{-ht}\sin\sqrt{k^2-h^2} =$$

$$= \mathrm{e}^{-ht}\left(a\cos\sqrt{k^2-h^2} + \frac{ha+v_0}{\sqrt{k^2-h^2}}\sin\sqrt{k^2-h^2}\right).$$

## 6. ЗАСТОСУВАННЯ ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Нехай потрібно знайти розв'язок системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + f_i(t), \qquad i = \overline{1,n} \qquad (13)$$

зі сталими коефіцієнтами $a_{ij}$, що задовольняє початковим умовам

$$x_1(0) = b_1, \quad x_2(0) = b_2, \ldots, \quad x_n(0) = b_n. \qquad (14)$$

Знайдемо зображення $F_i(p)$ функцій $f_i(t)$ $i = \overline{1,n}$.

Нехай $x(t) \leftrightarrow X(p)$, тоді $\dfrac{dx_i}{dt} \leftrightarrow pX_i(p) - b_i$, $i = \overline{1,n}$.

Замінимо в системі диференціальних рівняннь (13) оригінали їх зображеннями. В результаті отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$pX_i(p) - b_i = a_{i1}X_1(p) + a_{i2}X_2(p) + \ldots + a_{in}X_n(p) + F_i(p), \text{ де } i = \overline{1,n}.$$

Розв'язавши останню систему будь-яким методом, наприклад, за формулами Крамера, знайдемо зображення $X_1(p), \ldots, X_n(p)$.

Визначивши відповідні оригінали $x_1(t),\ldots,x_n(t)$, отримаємо розв'язок задачі Коші (13)-(14).

Аналогічно розв'язують інші систем лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

## 6.1. Методика розв'язування завдань №11-13

**Приклад 1.** Розв'язати систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = -2x - 2y + 10\,\mathrm{e}^{2t}, \\ y' = \ \ 2x - y + 7\,\mathrm{e}^{2t}, \end{cases}$$ при початкових умовах $x(0)=1, \quad y(0)=3.$

**Розв'язання.** Нехай $x(t) \leftrightarrow X(p)$, $y(t) \leftrightarrow Y(p)$, тоді за теоремою диференціювання оригінала

$$x'(t) \leftrightarrow pX(p) - x(0) = pX(p) - 1,$$

$$y'(t) \leftrightarrow pY(p) - y(0) = pY(p) - 3,$$

За таблицею зображень $\quad \mathrm{e}^{2t} \leftrightarrow \dfrac{1}{p-2}.$

Якщо в системі диференціальних рівнянь замінити оригінали їх зображеннями, то прийдемо до системи двох лінійних алгебраїчних рівнянь.

$$\begin{cases} pX(p) = -2X(p) - 2Y(p) + \dfrac{10}{p-2} + 1, \\ pY(p) = 2X(p) - Y(p) + \dfrac{7}{p-2} + 3, \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (p+2)X(p)+2Y(p)=\dfrac{p+8}{p-2}, \\ -2X(p)+(p-1)Y(p)=\dfrac{3p+1}{p-2}. \end{cases}$$

Для розв'язання системи скористуємося формулами Крамера.

$$X(p)=\frac{\Delta_X(p)}{\Delta(p)}, \qquad Y(p)=\frac{\Delta_Y(p)}{\Delta(p)},$$

$$\Delta(p)=\begin{vmatrix} p+2 & 2 \\ -2 & p+1 \end{vmatrix}=p^2+3p+6,$$

$$\Delta_X(p)=\begin{vmatrix} \dfrac{p+8}{p-2} & 2 \\ \dfrac{3p+1}{p-2} & p+1 \end{vmatrix}=\frac{(p+8)(p+1)-2(3p-1)}{p-2}=\frac{p^2+3p+6}{p-2},$$

$$\Delta_Y(p)=\begin{vmatrix} p+2 & \dfrac{p+8}{p-2} \\ -2 & \dfrac{3p+1}{p-2} \end{vmatrix}=\frac{(p+2)(3p+1)+2(p+8)}{p-2}=\frac{3(p^2+3p+6)}{p-2}.$$

Отже, $$X(p)=\frac{\Delta_X(p)}{\Delta(p)}=\frac{\cancel{(p^2+3p+6)}}{(p-2)\cancel{(p^2+3p+6)}}=\frac{1}{(p-2)},$$

$$X(p)=\frac{1}{(p-2)} \leftrightarrow \mathrm{e}^{2t}=x(t),$$

$$Y(p)=\frac{\Delta_Y(p)}{\Delta(p)}=\frac{3\,\cancel{(p^2+3p+6)}}{(p-2)\cancel{(p^2+3p+6)}}=\frac{3}{(p-2)},$$

$$Y(p)=\frac{3}{(p-2)} \leftrightarrow 3\,\mathrm{e}^{2t}=y(t).$$

Отже, $$x(t) = \mathrm{e}^{2t}; \quad y(t) = 3\,\mathrm{e}^{2t}$$

розв'язок системи диференціальних рівнянь.

**Приклад 2.** Розв'язати систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} 2x'' - y'' = -8x + 4y, \\ x' + y' = x + y, \end{cases} \text{ при початкових умовах } \begin{array}{l} x(0) = x'(0) = 1, \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{array}$$

**Розв'язання.** Нехай $x(t) \leftrightarrow X(p)$, $y(t) \leftrightarrow Y(p)$, тоді за теоремою диференціювання оригінала

$$x'(t) \leftrightarrow pX(p) - x(0) = pX(p) - 1,$$
$$x''(t) \leftrightarrow p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) - p - 1,$$

$$y'(t) \leftrightarrow p\,Y(p) - y(0) = p\,Y(p),$$
$$y''(t) \leftrightarrow p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p).$$

Система відповідних операторних рівнянь має вигляд

$$\begin{cases} 2(p^2X(p) - p - 1) - p^2Y(p) = -8X(p) + 4Y(p), \\ pX(p) - 1 + p\,Y(p) = X(p) + Y(p), \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2p^2 + 8)X(p) - (p^2 - 4)Y(p) = 2p + 2, \\ (p-1)X(p) + (p-1)Y(p) = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2X(p) - Y(p) = \dfrac{2(p+1)}{p^2 + 4}, \\ X(p) + Y(p) = \dfrac{1}{p-1}. \end{cases}$$

Додавши перше та друге рівняння системи, отримаємо

$$X(p) = \frac{1}{3}\left(\frac{2(p+1)}{p^2+4} + \frac{1}{p-1}\right) = \frac{1}{3}\left(2\frac{p}{p^2+4} + \frac{2}{p^2+4} + \frac{1}{p-1}\right),$$

$$X(p) \leftrightarrow x(t) = \frac{1}{3}(2\cos 2t + \sin 2t + \mathrm{e}^t).$$

З другого рівняння системи визначимо $Y(p)$:

$$Y(p) = \frac{1}{p-1} - X(p) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{p+1}{p^2+4}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(2\frac{1}{p-1} - 2\frac{p}{p^2+4} - \frac{2}{p^2+4}\right),$$

$$Y(p) \leftrightarrow y(t) = \frac{1}{3}(2\,\mathrm{e}^t - 2\cos 2t - \sin 2t).$$

Отже,
$$x(t) = \frac{1}{3}(2\cos 2t + \sin 2t + \mathrm{e}^t),$$

$$y(t) = \frac{1}{3}(2\,\mathrm{e}^t - 2\cos 2t - \sin 2t)$$

– розв'язок системи диференціальних рівнянь.

**Приклад 3.** Для заданої лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь розв'язати вказану задачу Коші

$$\begin{cases} x' - y - z = 0, & x(0) = 0, \\ y' - 3x - z = 0, & y(0) = 1, \\ z' - 3x - y = 0, & z(0) = 1. \end{cases}$$

**Розв'язання.** Нехай $x(t) \leftrightarrow X(p)$, $y(t) \leftrightarrow Y(p)$, $z(t) \leftrightarrow Z(p)$, тоді за теоремою диференціювання оригінала

$$x'(t) \leftrightarrow pX(p) - x(0) = pX(p),$$

$$y'(t) \leftrightarrow pY(p) - y(0) = pY(p) - 1,$$

$$z'(t) \leftrightarrow pZ(p) - z(0) = pZ(p) - 1.$$

Замінимо в системі диференціальних рівнянь оригінали відповідними зображеннями та отримаємо систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} pX(p) - Y(p) - Z(p) = 0, \\ pY(p) - 1 - 3X(p) - Z(p) = 0, \\ pZ(p) - 1 - 3X(p) - Y(p) = 0, \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} pX(p) - \ \ Y(p) - \ \ Z(p) = 0, \\ -3X(p) + pY(p) - Z(p) = 1, \\ -3X(p) - \ \ Y(p) - pZ(p) = 1. \end{cases}$$

Розв’яжемо систему за формулами Крамера:

$$X(p) = \frac{\Delta_X(p)}{\Delta(p)}, \quad Y(p) = \frac{\Delta_Y(p)}{\Delta(p)}, \quad Z(p) = \frac{\Delta_Z(p)}{\Delta(p)}.$$

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} p & -1 & -1 \\ -3 & p & -1 \\ -3 & -1 & p \end{vmatrix} = p(p^2-1) + (-3p-3) - (3-3p) = p(p^2-1) - 6(p+1) =$$

$$= (p+1)(p^2-p-6) = (p+1)(p+2)(p-3).$$

$$\Delta_X(p) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & p & -1 \\ 1 & -1 & p \end{vmatrix} = (p+1) - (-1-p) = 2(p+1).$$

$$\Delta_Y(p) = \begin{vmatrix} p & 0 & -1 \\ -3 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & p \end{vmatrix} = p(p+1) + (-3p-3) - (3-3) = p(p+1).$$

$$\Delta_Z(p) = \begin{vmatrix} p & -1 & 0 \\ -3 & p & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = p(p+1) + (-3+3) - (3-3p) = p(p+1).$$

Отже, $$X(p)=\frac{2(p+1)}{(p+1)(p+2)(p-3)}=\frac{2}{(p+2)(p-3)},$$

$$Y(p)=\frac{p(p+1)}{(p+1)(p+2)(p-3)}=\frac{p}{(p+2)(p-3)},$$

$$Z(p)=\frac{p}{(p+2)(p-3)}.$$

Знайдемо оригінали, які відповідають отриманим зображенням за теоремою Хевісайда.

$$x(t)=\underset{-2}{res}\,X(p)e^{pt}+\underset{3}{res}\,X(p)\,\mathrm{e}^{pt}=\underset{-2}{res}\frac{2\,\mathrm{e}^{pt}}{(p+2)(p-3)}+\underset{3}{res}\frac{2\,\mathrm{e}^{pt}}{(p+2)(p-3)}=$$

$$=2\lim_{p\to-2}\frac{\mathrm{e}^{pt}}{p-3}+2\lim_{p\to3}\frac{\mathrm{e}^{pt}}{p+2}=-\frac{2}{5}\mathrm{e}^{-2t}+\frac{2}{5}\mathrm{e}^{3t},$$

$$y(t)=\underset{-2}{res}\,X(p)\,\mathrm{e}^{pt}+\underset{3}{res}\,X(p)\,\mathrm{e}^{pt}=\lim_{p\to-2}\frac{p\,\mathrm{e}^{pt}}{p-3}+\lim_{p\to3}\frac{p\,\mathrm{e}^{pt}}{p+2}=\frac{2}{5}\mathrm{e}^{-2t}+-\frac{3}{5}\mathrm{e}^{3t},$$

$$z(t)=y(t)=\frac{2}{5}\mathrm{e}^{-2t}+-\frac{3}{5}\mathrm{e}^{3t}.$$

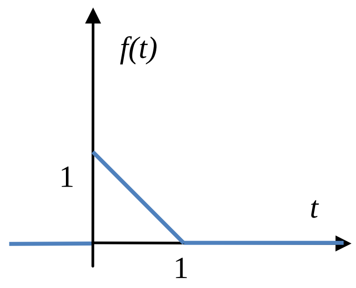
Отже, $$x(t)=\frac{2}{5}(\mathrm{e}^{3t}-\mathrm{e}^{-2t}),$$

$$y(t)=z(t)=\frac{1}{5}(3\,\mathrm{e}^{3t}+2\,\mathrm{e}^{-2t})$$

– розв’язок системи диференціальних рівнянь.

## 6.2. Методика розв’язування завдання №14

**Приклад 1.** За допомогою операційного числення розв’язати диференціальне рівняння $x''-x=f(t)$ з графічно заданою правою частиною і початковими умовами $x(0)=x'(0)=0$.




**Розв’язання.** Запишемо задану функцію в аналітичному вигляді

$$f(t)=\begin{cases}1-t, & 0\le t<1,\\ 0, & t>1.\end{cases}$$

За допомогою функції Хевісайда запишемо функцію у вигляді

$$f(t)=(1-t)[\eta(t)-\eta(t-1)]=\eta(t)-t\eta(t)+(t-1)\eta(t-1).$$

Знайдемо зображення для функції $f(t)$, використовуючи теорему загаювання. Нехай $f(t)\leftrightarrow F(p)$, тоді за теоремою загаювання

$$f(t-b)\eta(t-b)\leftrightarrow F(p)\,\mathrm{e}^{-bp},$$

$$f(t)=\eta(t)-t\eta(t)+(t-1)\eta(t-1)\leftrightarrow F(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^2}\mathrm{e}^{-p}.$$

Нехай $x(t)\leftrightarrow X(p)$, тоді за теоремою диференціювання оригінала

$$x'(t)\leftrightarrow pX(p), \qquad x''(t)\leftrightarrow p^2X(p).$$

Запишемо операторний вигляд диференціального рівняння

$$p^2X(p)-X(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^2}\mathrm{e}^{-p},$$

$$X(p)=\frac{1}{p(p^2-1)}-\frac{1-\mathrm{e}^{-p}}{p^2(p^2-1)}.$$

Для знаходження оригінала представимо зображення у вигляді суми елементарних дробів:

$$\frac{1}{p(p^2-1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{p+1}.$$

Знайдемо значення коефіцієнтів $A,\ B, C$:

$$1 = A(p^2-1) + Bp(p+1) + Cp(p-1)$$

$$\begin{aligned} p=0 \quad &: \quad A=-1, \\ p=1 \quad &: \quad B=0.5, \\ p=-1 &: \quad C=0.5. \end{aligned}$$

Отже,

$$\frac{1}{p(p^2-1)} = -\frac{1}{p} + \frac{1}{2(p-1)} + \frac{1}{2(p+1)}.$$

Аналогічно, можна отримати, що

$$\frac{1}{p^2(p^2-1)} = \frac{1}{p^2-1} - \frac{1}{p^2}.$$

$$X(p) = -\frac{1}{p} + \frac{1}{2(p-1)} + \frac{1}{2(p+1)} - \left(\frac{1}{p^2-1} - \frac{1}{p^2}\right)(1-\mathrm{e}^{-p}) =$$

$$= -\frac{1}{p} + \frac{1}{2(p-1)} + \frac{1}{2(p+1)} - \left(\frac{1}{p^2-1} - \frac{1}{p^2}\right) - \left(\frac{1}{p^2-1} - \frac{1}{p^2}\right)\mathrm{e}^{-p}.$$

Тоді

$$X(p) \leftrightarrow x(t) = -1 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{t} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t} - (\operatorname{sh} t - t) + \left[\operatorname{sh}(t-1)\eta(t-1) - (t-1)\eta(t-1)\right].$$

Отже, $$x(t) = -1 + \mathrm{e}^{-t} + t + \left[\operatorname{sh}(t-1) - (t-1)\right]\eta(t-1)$$

– розв’язок диференціального рівняння.

# 7. ЗАСТОСУВАННЯ ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ ТА ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

**Інтегральним рівнянням** називається рівняння, яке містить шукану функцію під знаком інтеграла.

## 7.1. Інтегральні рівняння Вольтерра першого та другого роду

**1.** До **інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду** відноситься рівняння виду

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x-t)\varphi(t)\,dt\,,$$

с ядром $K(x,t)$, яке залежить від різниці аргументів $x-t$, причому $f(x)$, $K(x-t)$ – задані функції, $\varphi(x)$ – шукана. Інколи цей тип рівнянь називають **рівняннями типа згортки**.

Розглянемо інтегральне рівняння Вольтерра другого роду типа згортки

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x-t)\varphi(t)\,dt\,. \qquad (15)$$

Знайдемо розв’язок інтегрального рівняння (15).

Будемо вважати, що $f(x)$, $K(x)$ – достатньо гладкі функції, які мають скінчений порядок росту. В цьому випадку і функція $\varphi(x)$ при $x \ge 0$ має скінчений порядок росту, отже можна знайти зображення функцій $f(x)$, $K(x)$, $\varphi(x)$ по Лапласу. Нехай

$$\varphi(x) \leftrightarrow \Phi(p), \quad f(x) \leftrightarrow F(p), \qquad K(x) \leftrightarrow L(p).$$

Оскільки інтеграл в правої частині формули (15) –

$$K(x)*\varphi(x)=\int_0^x K(x-t)\varphi(t)\,dt$$

– згортка оригіналів $K(x),\ \varphi(x)$, то за теоремою Бореля

$$K(x)*\varphi(x)\leftrightarrow L(p)\cdot\Phi(p).$$

Отже інтегральному рівнянню (13) буде відповідати операторне рівняння

$$\Phi(p)=F(p)+L(p)\cdot\Phi(p).$$

Звідки,

$$\Phi(p)=\frac{F(p)}{1-L(p)},\qquad L(p)\neq 1. \tag{16}$$

Знайшовши оригінал $\varphi(x)$, який відповідає зображенню (16) – отримаємо розв’язок інтегрального рівняння (15).

**2. Інтегральними рівняннями Вольтерра першого роду**, с ядром $K(x,t)$, яке залежить від різниці аргументів $x-t$, називають рівняння вигляду

$$f(x)=\int_0^x K(x-t)\varphi(t)\,dt, \tag{17}$$

де $f(x),\ K(x-t)$ – задані функції, $\varphi(x)$ – шукана.

Знайдемо розв’язок інтегрального рівняння (17). Нехай

$$\varphi(x)\leftrightarrow\Phi(p),\qquad f(x)\leftrightarrow F(p),\qquad K(x)\leftrightarrow L(p).$$

Оскільки інтеграл в правої частині формули (17)

$$K(x)*\varphi(x)=\int_0^x K(x-t)\varphi(t)\,dt$$

– згортка оригіналів $K(x)$, $\varphi(x)$, то за теоремою Бореля

$$K(x) * \varphi(x) \leftrightarrow L(p)\Phi(p).$$

Отже, інтегральному рівнянню (15) буде відповідати операторне рівняння

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{L(p)}, \quad L(p) \neq 0.$$

Оригінал для $\Phi(p)$ буде розв'язком інтегрального рівняння (17).

## 7.2. Методика розв'язування завдання №15

**Приклад 1.** Розв'язати інтегральне рівняння

$$\varphi(x) = \operatorname{ch} x - \int_0^x (x-t)\varphi(t)\,dt.$$

**Розв'язання**. Нехай $\varphi(x) \leftrightarrow \Phi(p)$. За таблицею зображень

$$\operatorname{ch} x \leftrightarrow \frac{p}{p^2-1}, \qquad x \leftrightarrow \frac{1}{p^2}.$$

$x * \varphi(x) = \int_0^x (x-t)\varphi(t)\,dt$ – згортка оригіналів. За теоремою Бореля

$$x * \varphi(x) \leftrightarrow \frac{1}{p^2} \cdot \Phi(p).$$

Тоді заданому інтегральному рівнянню буде відповідати наступне операторне

$$\Phi(p) = \frac{p}{p^2-1} - \frac{1}{p^2}\Phi(p) \quad \Rightarrow \quad \Phi(p)\left(1 + \frac{1}{p^2}\right) = \frac{p^2}{p^2-1} \quad \Rightarrow$$

$$\Phi(p) = \frac{p^3}{(p^2+1)(p^2-1)}$$

– розв'язок операторного рівняння.

Знайдемо оригінал для отриманого зображення. Для цього розкладемо раціональний дріб на суму елементарних.

$$\Phi(p)=\frac{p^3}{(p^2+1)(p^2-1)}=\frac{A}{p-1}+\frac{B}{p+1}+\frac{Cp+D}{p^2+1}.$$

Знайдемо значення коефіцієнтів $A,\ B, C, D$:

$$p^3=A(p+1)(p^2+1)+B(p-1)(p^2+1)+Cp(p^2-1)+D(p^2-1);$$
$$p=\ \ 1:\qquad 1=4A,\quad\Rightarrow\quad A=0.25,$$
$$p=-1:\quad -1=-4B,\quad\Rightarrow\quad B=0.25,$$

$$\left.\begin{array}{ll} p=\ \ i: & -i=-2iC-2D,\\ p=-i: & \ \ i=\ \ 2iC-2D,\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}D=0,\\ C=0.5.\end{cases}$$

$$\Phi(p)=\frac{p^3}{(p^2+1)(p^2-1)}=\frac{1}{4(p-1)}+\frac{1}{4(p+1)}+\frac{p}{2(p^2+1)},$$

За таблицею зображень

$$\Phi(p)\leftrightarrow\varphi(x)=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{t}+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{2}\cos t.$$

Отже, $$\varphi(x)=\frac{1}{2}(\operatorname{ch}t+\cos t)$$

– розв’язок інтегрального рівняння .

**Приклад 2.** Розв’язати інтегральне рівняння

$$\varphi(x)=x-\int_0^x \operatorname{sh}(x-t)\varphi(t)\,dt.$$

**Розв’язання.** Нехай $\varphi(x)\leftrightarrow\Phi(p),\quad \operatorname{sh}x\leftrightarrow\frac{1}{p^2-1},\quad x\leftrightarrow\frac{1}{p^2},$

$\operatorname{sh}x*\varphi(x)=\int_0^x \operatorname{sh}(x-t)\varphi(t)\,dt$ – згортка оригіналів. За теоремою Бореля

$$\operatorname{sh} x * \varphi(x) \leftrightarrow \frac{1}{p^2-1} \cdot \Phi(p).$$

Тоді заданому інтегральному рівнянню буде відповідати наступне операторне

$$\Phi(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2-1}\Phi(p) \quad \Rightarrow$$

$$\Phi(p)\left(1 + \frac{1}{p^2-1}\right) = \frac{1}{p^2},$$

$$\Phi(p) = \frac{p^2-1}{p^4} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{3!}\frac{3!}{p^4}$$

– розв'язок операторного рівняння. Знайдемо оригінал для отриманого зображення

$$\Phi(p) \leftrightarrow \varphi(x) = x - \frac{1}{6}x^3$$

– розв'язок інтегрального рівняння.

**Приклад 3.** Розв'язати інтегро-диференціальне рівняння

$$\int_0^t e^{t-\tau}\sin(t-\tau)x(\tau)\,d\tau = x'' - x' + e^t(1-\cos t), \qquad x(0) = x'(0) = 1.$$

**Розв'язання.** Нехай $x(t) \leftrightarrow X(p)$, тоді за теоремою диференціювання оригінала

$$x'(t) \leftrightarrow pX(p) - x(0) = pX(p) - 1,$$
$$x''(t) \leftrightarrow p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) - p - 1,$$

За таблицею зображень $e^t \leftrightarrow \dfrac{1}{p-1}$.

$$e^t \cdot \cos t \leftrightarrow \frac{p-1}{(p-1)^2+1}$$ – за теоремою зміщення,

$$e^t \cdot \sin t \leftrightarrow \frac{1}{(p-1)^2+1}$$ – за теоремою зміщення.

$$\int_0^t e^{t-\tau} \sin(t-\tau) x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{X(p)}{p^2-2p+2}$$ – за теоремою Бореля.

Отримаємо операторне рівняння, яке відповідає заданому інтегро-диференціальному рівнянню

$$\underline{\frac{X(p)}{p^2-2p+2}} = \underline{p^2 X(p)} - p - 1 - \underline{pX(p)} + 1 + \frac{1}{p-1} - \frac{p-1}{(p-1)^2+1}$$

$$\left(\frac{1}{p^2-2p+2} + p - p^2\right) X(p) = \frac{1}{p-1} - \frac{p-1}{(p-1)^2+1} - p \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1 - p(p-1)(p^2-2p+2)}{p^2-2p+2} \cdot X(p) = \frac{\cancel{(p-1)^2} + 1 - \cancel{(p-1)^2} - p(p-1)(p^2-2p+2)}{(p^2-2p+2)(p-1)}$$

$$\Rightarrow \qquad X(p) = \frac{(p^2-2p+2)}{(p^2-2p+2)(p-1)} \qquad \Rightarrow$$

$$X(p) = \frac{1}{p-1} \leftrightarrow e^t = x(t).$$

Отже, $x(t) = e^t$ – розв'язок інтегро-диференціального рівняння.

**Приклад 4.** Розв'язати інтегральне рівняння $\operatorname{sh} x = \int_0^x e^{x-t} \varphi(t)\, dt.$

**Розв'язання.** Нехай $\varphi(x) \leftrightarrow \Phi(p)$. За таблицею зображень

$$\operatorname{sh} x \leftrightarrow \frac{1}{p^2-1}, \qquad\qquad e^x \leftrightarrow \frac{1}{p-1},$$

$$\mathrm{e}^{x} * \varphi(x) = \int\limits_{0}^{x} \mathrm{e}^{x-t} \varphi(t)\, dt$$ – за теоремою Бореля $\mathrm{e}^{x} * \varphi(x) \leftrightarrow \dfrac{1}{p-1} \cdot \Phi(p)$.

Тоді заданому інтегральному рівнянню буде відповідати наступне операторне

$$\frac{1}{p^2-1} = \frac{1}{p-1}\Phi(p) \quad \Rightarrow \quad \Phi(p) = \frac{1}{p+1} \leftrightarrow \mathrm{e}^{-x} = \varphi(x).$$

Отже, $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-x}$ – розв’язок інтегрального рівняння.

.

## РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА


1. Краснов М. Л., Киселев А. Н., Макаренко Г. И. Операционное исчисление. Теория устойчивости [Текст] : учебное пособие / Краснов Михаил Леонтьевич, Киселев Александр Иванович, Макаренко Григорий Иванович; [предисл. авторов]. – 4-е изд., испр. – М.: КомКнига, 2006. – 208 с. – ISBN 5–484–00462–4
2. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. [Текст] : учебное пособие. Том 2 / Николай Семенович Пискунов; [предисл. автора]. – 5-е изд. – М.: Наука, 1968. – 308 с. – ISBN 5–86457-020-6.
3. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике [Текст] : Тридцать пять лекцій. 2 часть / Дмитрий Письменный; [вступ. ст. автора] – М. : Рольф, 2002. – 256 с. : ил; 21 см. – 10000 экз. – ISBN 5–7836–0312–0.
4. Сборник задач по математике (для втузов). Специальные разделы математического анализа. Под редакцией Ефимова А. В., Демидовича Б. П. – М., Наука, 1981, 1986.
5. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст] : учебное пособие для вузов в 2-х ч. Ч. II / Павел Ефимовмч Данко, Александр Георгиевич Попов, Татьяна Яковлевна Кожевникова . – Изд. 5-е, исп. – М.: Высш. шк., 1996. – 416 с.: ил. ; 21 см. – Библиогр. : с. 416 . – 10000 экз. – ISBN 5–06–003071–7 (ч. II). – ISBN 5–06–003072.
6. Араманович И. Г., Лунц Г. Л., Эльсгольц Л. Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1968.

## ЗМІСТ

ВСТУП………………………………………………………………………….3

1. ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА…………………...……….4

1.1. Методика розв'язування завдання №1……………………………….6

1.2. Методика розв'язування завдання №2…………………………..…..6

2. ВЛАСТИВОСТІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА…………………..…..……9

3. ТАБЛИЦЯ ОРИГІНАЛІВ ТА ЗОБРАЖЕНЬ……………………………...13

3.1. Методика розв'язування завдання №3…………………………..….14

3.2. Методика розв'язування завдання №4…………………………….…17

3.3. Методика розв'язування завдань №5-6…………………………..……19

4. ЗАСТОСУВАННЯ ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ. ЗАГАЛЬНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ……………………………………………………………..………...23

4.1. Методика розв'язування завдань №7-8……………….............….…..…24

5. ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛА ДЮАМЕЛЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ З НУЛЬОВИМИ ПОЧАТКОВИМИ УМОВАМИ...............................31

5.1. Методика розв'язування завдання №9……………..……...........32

5.2. Методика розв'язування завдання №10……………………........…..36

6. ЗАСТОСУВАННЯ ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ СТАЛИМИ

КОЕФІЦІЄНТАМИ......................................................................………………38
6.1. Методика розв’язування завдань №11-13……….....………………..39
6.2 Методика розв’язування завдання №14…………………...........……44
7. ЗАСТОСУВАННЯ ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ ТА ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ …......…..47
7.1. Інтегральні рівняння Вольтерра першого та другого роду.................47
7.2. Методика розв’язування завдання №15….…………………...……49
РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА…………………………….…………..54